Математика 9-10 класс

(Этап длится 240 минут. Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы	задачи	
12	1.	В таблице 9×9 расставлены различные натуральные числа, сумма которых равна $2S$. Известно, что в каждой строке числа возрастают слева направо, а в каждом столбце - снизу вверх. Может ли сумма чисел в центральном квадрате 5×5 быть больше S?
15	2.	Дан описанный четырехугольник $ABCD$, у которого радиусы вписанных окружностей треугольников ABC и ADC равны. Найдите угол между диагоналями AC и BD.
15	3.	В последовательности чисел Фибоначчи $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ каждое следующее число, начиная с третьего, равно сумме двух предыдущих. Докажите, что среди чисел Фибоначчи нет ни одной натуральной степени числа 7.
20	4.	Существует ли прямоугольный параллелепипед, у которого длины всех ребер иррациональны, а объем, полная поверхность и бóльшая диагональ – числа целые? (*Прямоугольный параллелепипед* – это фигура в пространстве, задаваемая неравенствами $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le c$, где $a, b, c > 0$ – фиксированные числа. *Бóльшая диагональ* – это максимальное расстояние между вершинами параллелепипеда.)
32	5.	Дано несколько вещественных чисел, по модулю не превосходящих 1. Сумма всех чисел равна S. Докажите, что из них можно выбрать несколько чисел так, чтобы при некотором натуральном $n < 100$ сумма выбранных чисел отличалась от $\frac{nS}{100}$ не более чем на $\frac{1}{100}$.
28	6.	Рассматриваются наборы из семи гирь с суммарным весом 1 (вес каждой гири неотрицателен). Назовем поднабор *большим*, если сумма весов гирь поднабора больше или равна 2/3. Для каждого набора найдем число больших поднаборов. Найдите минимум этого числа по всем наборам.
	7.	Даны m подмножеств n-элементного множества: $A_1, \ldots, A_m$. Обозначим через $\lvert A_i\rvert$ число элементов множества A_i. Рассмотрим неравенство $$n^2 \sum_{i,j,k=1}^{m} \lvert A_i \cap A_j \cap A_k\rvert \ge (\lvert A_1\rvert + \cdots + \lvert A_m\rvert)^3,$$ в котором индексы i, j, k пробегают все значения от 1 до m, то есть в сумме всего m^3 слагаемых.
15	а)	Докажите это неравенство при $m = 3$.
25	б)	Докажите это неравенство при произвольном натуральном m.